TAMPEREEN YLIOPISTO

Pro gradu -tutkielma

Johanna Visama

Lukion geometrian opiskelusta

Informaatiotieteiden yksikkö

Matematiikka

Helmikuu 2013

Tampereen yliopisto

Informaatiotieteiden yksikkö

VISAMA, JOHANNA: Lukion geometrian opiskelusta

Pro gradu -tutkielma, 47 s.

Matematiikka

Helmikuu 2013

Tiivistelmä

Tässä pro gradu -tutkielmassa tutustutaan lukion pitkän matematiikan geometrian kurssin keskeisimpiin sisältöihin sekä geometrian kurssiin liittyviin ylioppilastehtäviin vuosien 1991 ja 2010 välillä. Tarkoituksena on tutkia geometrian ylioppilastehtävien suosiota ja osaamista. Lisäksi selvitetään opetussuunnitelmien perusteiden sekä ylioppilastehtävien vastaavuutta toisiinsa. Tutkielman alussa käydään läpi lukion opetussuunnitelmien perusteita vuosilta 1985, 1994 ja 2003, minkä jälkeen perehdytään lukion pitkän matematiikan geometrian kurssin keskeisimpiin sisältöihin. Tutkielmassa tutustutaan mallitehtävien avulla pitkän matematiikan ylioppilaskokeiden geometrian tehtävien tehtävätyyppeihin. Ylioppilastehtävistä tehtyjen tilastojen perusteella geometrian tehtävien voidaan havaita olevan suosittuja ja melko hyvin osattuja. Tehtävien sisältö vastaa opetussuunnitelmien perusteissa tärkeimmiksi nostettuja aihepiirejä.

Sisältö

1 Johdanto

Geometria matematiikan osa-alueena jakaa usein mielipiteitä. Joidenkin mielestä geometria on paikoin turhankin haastavaa, toisille geometria taas on se kaikista innostavin matematiikan osa-alue. Itse kuulun jälkimmäiseen joukkoon. Geometria on kiehtonut minua peruskoulusta asti ja erityisesti lukion matematiikan kursseista geometrian kurssi oli mieluisin kurssi, sillä geometrian tehtävät olivat usein käytännön läheisiä ja todentuntuisia.
Tässä pro gradu -tutkielmassa tarkastellaan lukion pitkän matematiikan geometrian kurssin keskeisimpiä sisältöjä. Tarkoituksena on lisäksi selvittää geometrian ylioppilastehtävien suosiota sekä opetussuunnitelman perusteiden ja ylioppilastehtävien vastaavuutta keskenään.
Luvussa 2 tutustutaan lukion opetussuunnitelman perusteisiin vuosilta 1985, 1994 ja 2003. Luku 3 koostuu matemattisesta teoriasta, jossa perehdytään lukion pitkän matematiikan geometrian kurssin keskeisimpiin sisältöihin ja näiden sisältöjen taustalla olevaan teoriaan. Luvussa 4 perehdytään lukion pitkän matematiikan geometrian ylioppilastehtävien tehtävätyyppeihin ja geometrian tehtävien suosioon. Lisäksi luvussa 4 käydään läpi tarkemmin joitakin geometrian kurssin oppisisältöihin pohjautuvia yo-tehtäviä vuosien 1991 ja 2010 väliseltä ajalta. Päälähdeteoksena toimii vuonna 2001 julkaistu kirja Geometry, Theorems and Constructions, jonka ovat kirjoittaneet Allan Berele ja Jerry Goldman.

2 Geometrian opiskelu lukiossa

Tässä luvussa perehdytään vuosien 1985, 1994 ja 2003 lukion opetussuunnitelman perusteisiin pitkän matematiikan geometrian kurssin osalta. Perinteisesti geometrian opiskelu on lukiossa jakautunut kahteen eri kurssiin, geometriaan ja analyyttiseen geometriaan. Tässä pro gradu -tutkielmassa keskitytään geometrian kurssin oppisisältöihin ja analyyttisen geometrian osuus jää tämän tutkielman ulkopuolelle. Opetussuunnitelman perusteisiin tutustuttaessa keskitytään tarkastelemaan mitkä asiat nousevat geometrian kurssin keskeisimmiksi sisällöiksi ja millaisia oppimistavoitteita opiskelijalle asetetaan. Tämän jälkeen luvussa 3 käydään läpi keskeisimpiin sisältöihin liittyvä matemaattinen teoria.

2.1 Lukion opetussuunnitelman perusteet 1985

Vuoden 1985 lukion opetussuunnitelman perusteissa matematiikan opetus on jakautunut kahteen, laajuudeltaan erilaiseen oppimäärään. Tällaista jakoa on perusteltu oppilaiden erilaisella kiinnostuksella matematiikkaa kohtaan sekä tulevien jatko-opintojen erilaisilla vaatimuksilla. Nykyistä lyhyen matematiikan oppimäärää vastaava yleinen oppimäärä koostui seitsemästä 38 oppitunnin mittaisesta kurssista. Vastaavasti nykyistä pitkän matematiikan oppimäärää vastannut laaja oppimäärä koostui yhdestätoista kurssista. [1, s. 283-285]

Laajan matematiikan geometrian opiskelu jakautui vuoden 1985 opetussuunnitelman perusteissa pääosin kolmeen kurssiin. Ensimmäinen näistä kursseista, kurssi numero kolme, on nimeltään vektorit ja geometriaa, jossa opiskelijan geometrian opiskelun tavoitteeksi on asetettu selviytyä tavallisimmista tasogeometrisista laskutehtävistä. Kurssin keskeisimpiä geometrian oppisisältöä ovat tylpän kulman sini ja kosini, sini- ja kosinilause, tasokuvioiden ominaisuuksien kertaus, yhdenmuotoisuus, mediaanien leikkauspistelause ja kulmanpuolittajalause. Lisäksi sisällössä mainitaan geometriset sovellukset. [1, s. 290-295]

Toinen geometrian kurssi on nimeltään analyyttistä geometriaa, jonka oppisisältöihin ei tässä pro gradu -tutkielmassa keskitytä. Kolmas kurssi, jossa keskitytään geometrian opiskeluun on kurssi numero kymmenen, jonka nimenä on vektorilaskennan täydennys, avaruusgeometriaa ja kompleksiluvut. Kurssin nimen mukaisesti goemetrian opiskelun osalta tavoitteena on, että opiskelija totuttautuu yksinkertaisiin avaruusgeometrisiin tarkasteluihin. Keskeisimpinä sisältöinä avaruusgeometrian osalta mainitaan kappaleiden piirtäminen ja ominaisuudet, tilavuuksien laskukaavat sekä avaruusgeometriset ääriarvotehtävät. [1, s. 291, 295]

2.2 Lukion opetussuunnitelman perusteet 1994

Seuraavan kerran lukion opetussuunnitelmaa uudistettiin 1990-luvulla ja lukion opetussuunnitelman perusteet julkaistiin vuonna 1994. Tällöin lukiokoulutus koki joitakin muutoksia. Aiemman luokallisen lukion sijaan siirryttiin opiskelemaan luokattomassa lukiossa, joka lisäsi valinnaisuutta sekä mahdollisti entistä paremmin henkilökohtaisen opintosuunnitelman noudattamisen. Samalla matematiikan opiskelu jaetiin aiemman yleisen ja laajan oppimäärän sijaan niitä vastaaviin lyhyeen ja pitkään oppimäärään. Lyhyt oppimäärä koostui kuudesta ja pitkä oppimäärä kymmenestä pakollisesta kurssista. Lisäksi oli mahdollista opiskella koulukohtaisia syventäviä kursseja. [2, s. 21, 70-76]

Pitkän matematiikan oppimäärässä geometrian opiskelu oli jaettu kahteen kurssiin, geometriaan ja analyyttiseen geometriaan. Geometrian kurssin tavoitteena oli ohjata opiskelijaa tekemään täsmällisiä havaintoja sekä johtopäätöksiä ympärillä olevasta maailmasta. Lisäksi geometrian opiskelulla pyrittiin ohjaamaan opiskelijaa luokittelemaan ja perustelemaan kuvioihin liittyviä ominaisuuksia. Kurssin tavoitteena oli kehittää opiskelijan avaruudellista hahmottamiskykyä kolmiulotteisia kapppaleita tutkimalla. Kappaleista laadittiin erilaisia projektioita sekä leikkauksia ja ratkaistiin näin erilaisia laskennollisia sekä piirrustuksellisia ongelmia. Kurssin sisältöön kuului myös geometristen kuvausten ominaisuuksien selvittäminen ja todistamisen harjoitteleminen. Kurssin toteuttamisessa tuli mahdollisuuksien mukaan pyrkiä käyttämään apuna sopivia tietokoneohjelmia ja rakentelumalleja. [2, s. 71]

2.3 Lukion opetussuunnitelman perusteet 2003

Lukion opetussuunnitelmaa ja tuntijakoa uudistettiin jälleen 2000-luvun alkupuolella. Uusi opetussuunnitelma hyväksyttiin vuonna 2003 ja sen käyttöönotto tuli aloittaa lukioissa asteittain viimeistään vuoden 2005 syyslukukauden alusta. Matematiikan osalta opetussuunnitelma pysyi pitkälti aiemman kaltaisena. Lyhyen matematiikan oppimäärä koostui kuudesta pakollisesta kurssista, joiden lisäksi tarjottiin valtakunnallisesti kaksi syventävää kurssia. Pitkän matematiikan oppimäärän laajuus puolestaan säilyi kymmenessä pakollisessa kurssissa, joiden lisäksi oli valtakunnallisesti mahdollista opiskella kolme syventävää kurssia. [3, s. 3, 118-128]

Pitkän matematiikan geometrian opiskelu jakaantui edelleen 2000-luvulla vuoden 1994 opetussuunnitelman perusteiden tapaan kahteen eri kurssiin, geometriaan ja analyyttiseen geometriaan. Geometrian kurssin tavoitteeksi asetettiin opiskelijan harjaantuminen hahmottamaan tilaa ja muotoa niin kaksi- kuin kolmiulotteisissakin tilanteissa. Lisäksi tavoitteena oli, että opiskelija oppii muotoilemaan ja perustelemaan sekä käyttämään geometrista tietoa sisältäviä lauseita. Tavoitteena oli myös oppia ratkaisemaan geometrisia ongelmia kuvioiden ja kappaleiden ominaisuuksia, yhdenmuotoisuutta, Pythagoraan lausetta sekä suora- ja vinokulmaisen kolmion trigonometriaa hyväksi käyttäen. Kurssin keskeisimpiä sisältöjä olivat kuvioiden ja kappaleiden yhdenmuotoisuus sekä sini- ja kosinilauseet. Lisäksi keskeisimpiin sisältöihin kuuluivat ympyrän, sen osien ja siihen liittyvien suorien geometria sekä kuvioihin ja kappaleisiin liittyvien pituuksien, kulmien, pinta-alojen ja tilavuuksien laskeminen. [3, s. 120]

2.4 Yhteenveto geometrian kurssin sisällöistä

1980-luvun puolestavälistä lukion pitkän matematiikan geometrian kurssin keskeisimmät oppisisällöt ja tavoitteet ovat säilyneet pitkälti samoina. Opiskelijoille asetetut tavoitteet ovat liittyneet tasogeometrian ja avaruusgeometrian kuvioiden ja kappaleiden hahmottamiseen. Keskeisimpinä sisältöinä ovat säilyneet tasokuvioiden ja avaruuskappaleiden ominaisuudet, yhdenmuotoisuus, sini- ja kosinilauseet sekä pinta-alojen ja tilavuuksien laskeminen.

3 Matemaattinen teoria

Tässä luvussa käydään läpi lukion pitkän matematiikan geometrian kurssin keskeisimpiä sisältöjä ja näiden sisältöjen taustalla olevaa matemaattista teoriaa. Lukijan toivotaan jo opiskelleen lukion pitkän oppimäärän geometrian kurssin, sillä tarkoituksena on syventää kyseisellä kurssilla opiskeltuja asioita. Aluksi tutustutaan käytössä oleviin merkintöihin, jotka pääsääntöisesti vastaavat lähdekirjassa käytössä olleita merkintöjä.

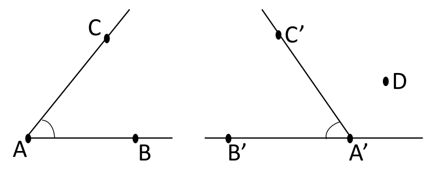
3.1 Merkinnöistä

Pisteitä merkitään isoilla kirjaimilla. Suoraa, jolla sijaitsevat pisteet A ja B merkitään symbolilla $\overleftrightarrow{AB}$. Puolisuoraa, joka alkaa pisteestä A ja johon kuuluu piste B merkitään symbolilla $\overrightarrow{AB}$. Janaa, jonka päätepisteet ovat A ja B kuvaamaan käytetään merkintää $\overline{AB}$. Merkintä AB tarkoittaa janan $\overline{AB}$ pituutta.

Kulmaa voidaan merkitä kahdella tavalla. Merkintä $\angle A$ viittaa kulmaan, jonka kärki on pisteessä A. Merkintä $\angle BAC$ tarkoittaa puolestaan kulmaa, jonka kärki on pisteessä A ja jonka kyljet ovat puolisuorat $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{AC}$. Kulman $\angle A$ suuruudelle käytetään merkintää $\measuredangle A$.Kolmiota, jonka kärjet sijaitsevat pisteissä A, B ja C kuvaamaan käytetään merkintää $\triangle ABC$.

Yhtenevyyttä merkitään symbolilla $\cong$. Janojen pituuden ja kulmien suuruuden yhtenevyydet, jotka ovat Eukleideen tasogeometrian aksioomia, esitellään seuraavaksi. Olkoon $\overline{AB}$ jana ja olkoon $\overrightarrow{CE}$ puolisuora. Tällöin on olemassa yksi ja vain yksi puolisuoran $\overrightarrow{CE}$ piste D siten, että $\overline{AB} \cong \overline{DE}$. Lisäksi, jos janoille $\overline{FG}$, $\overline{HI}$ ja $\overline{JK}$ on voimassa $\overline{FG} \cong \overline{JK}$ ja $\overline{HI} \cong \overline{JK}$, niin $\overline{FG} \cong \overline{HI}$. Janojen yhtenevyys on ekvivalenssi. [5, s. 22]

Olkoon $\angle BAC$ kulma, $\overrightarrow{A'B'}$ puolisuora ja D suoran $\overleftrightarrow{A'B'}$ ulkopuolinen piste kuvan 1 mukaisesti. Tällöin on olemassa yksi ja vain yksi puolisuora $\overrightarrow{A'C'}$, joka on samalla puolen suoraa $\overleftrightarrow{AB}$ kuin piste D niin, että $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$. Lisäksi, jos kulmille $\angle E$, $\angle F$ ja $\angle G$ on voimassa $\angle E \cong \angle G$ ja $\angle F \cong \angle G$, niin $\angle E \cong \angle F$. Kulmien yhtenevyys on ekvivalenssi. [5, s. 23]



Kuva 1: Yhtenevät kulmat

3.2 Kolmioiden yhtenevyys

Tutustutaan aluksi kolmioiden yhtenevyyden määritelmään sekä joihinkin aiheeseen liittyviin lauseisiin.

Määritelmä 3.1. (Vrt. [4, s. 4]) Kaksi kolmiota, kolmio $\triangle ABC$ ja kolmio $\triangle DEF$, ovat yhtenevät, mikäli seuraavat kuusi ehtoa ovat voimassa:

1. $\angle A \cong \angle D$
2. $\angle B \cong \angle E$
3. $\angle C \cong \angle F$
4. $\overline{AB} \cong \overline{DE}$
5. $\overline{BC} \cong \overline{EF}$
6. $\overline{AC} \cong \overline{DF}$

Tällöin voidaan kirjoittaa $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Aina ei kuitenkaan tarvitse käydä läpi jokaista edellämainituista kuudesta ehdosta, jotta kolmioiden voidaan todeta olevan yhteneviä. Sen sijaan on olemassa kolme teoreemaa, joiden mukaan toteamalla joidenkin ehdoista olevan voimassa, voidaan loppujenkin ehtojen päätellä toteutuvan. Nämä kolme teoreemaa, joita merkitään yleisesti lyhenteillä ASA (angle-side-angle), SAS (side-angle-side) ja SSS (side-side-side), esitellään seuraavaksi.

Lause 3.1. *(ASA) Jos $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$ ja $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, niin $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.*

Lause 3.2. *(SAS) Jos $\angle A \cong \angle D$, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ ja $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, niin $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.*

Lause 3.3. *(SSS) Jos* $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ *ja* $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, *niin* $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Lause 3.2 esitetään usein aksioomana, joka kuvaa geometristen peruskäsitteiden välisiä suhteita. Tällöin lausetta ei todisteta, vaan se hyväksytään yhtenä Eukleideen tasogeometriaan liittyvänä postulaattina. [5, s. 7-8,24]

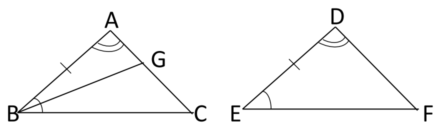
Lauseiden 3.1 ja 3.3 todistaminen pohjautuu lauseeseen 3.2. Todistetaan aluksi lause 3.1.

Todistus. (Lause 3.1. vrt. [4, s. 7])

Oletetaan, että kolmioille $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ seuraavat ehdot ovat voimassa: $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$ ja $\overline{AB} \cong \overline{DE}$.

Tutkitaan kolmioiden sivuja $\overline{AC}$ ja $\overline{DF}$. Jos sivut ovat yhtenevät, ovat kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ yhtenevät SAS:n nojalla ja lause on todistettu.

Oletetaan sitten, että kolmioiden sivut $\overline{AC}$ ja $\overline{DF}$ eivät ole yhtenevät, vaan sivu $\overline{AC}$ on pidempi. Tällöin on olemassa kuvan 2 mukaisesti piste G sivulla $\overline{AC}$ siten, että $\overline{AG} \cong \overline{DF}$.



Kuva 2: ASA:n todistus

Nyt kolmiot $\triangle ABG$ ja $\triangle DEF$ toteuttavat ehdot $\angle A \cong \angle D$, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ ja $\overline{AG} \cong \overline{DF}$, joten SAS:n nojalla $\triangle ABG \cong \triangle DEF$.

Tällöin siis $\angle ABG \cong \angle E$. Mutta oletuksen mukaan $\angle ABC \cong \angle E$, joten on siis oltava $\angle ABG \cong \angle ABC$. Tämä on kuitenkin mahdotonta, sillä oletuksen mukaan sivu $\overline{AC}$ on pidempi kuin sivu $\overline{DF}$ ja piste G on kulman $\angle ABC$ aukeamassa, jolloin kulman $\angle ABG$ on oltava pienempi kuin kulman $\angle ABC$. Tämä on ristiriita ja oletus, jonka mukaan kolmioiden sivut $\overline{AC}$ ja $\overline{DF}$ eivät ole yhtenevät on epätosi. Täten $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ja lause on todistettu. $\square$

Ennen lauseen 3.3 todistamista, tutustutaan hyödylliseen apulauseeseen.

Lause 3.4. *(Tasakylkinen kolmio) Olkoon* $\triangle ABC$ *jokin kolmio. Tällöin seuraavat ehdot ovat voimassa:*

1. *Jos* $\angle B \cong \angle C$, *niin* $\overline{AB} \cong \overline{AC}$.

2. *Jos* $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, *niin* $\angle B \cong \angle C$.

Todistus. (Vrt. [4, s. 8])

(1) Tässä tapauksessa on voimassa seuraavat yhtenevyydet: $\angle B \cong \angle C$, $\angle C \cong \angle B$ ja $\overline{BC} \cong \overline{CB}$. Täten kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle ACB$ ovat yhteneviä ASA:n nojalla, joten $\overline{AB} \cong \overline{AC}$.

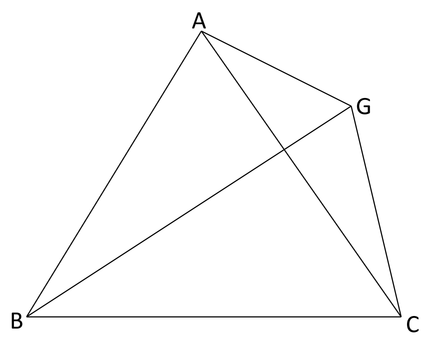
(2) Tässä tapauksessa on voimassa seuraavat yhtenevyydet: $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, $\overline{AC} \cong \overline{AB}$ ja $\angle A \cong \angle A$. Täten kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle ACB$ ovat yhteneviä SAS:n nojalla, joten $\angle B \cong \angle C$. □

Todistetaan sitten lause 3.3.

Todistus. (Lause 3.3. Vrt. [4, s. 8-10])

Oletetaan, että kolmioiden $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ sivut ovat yhtenevät, ts. $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ ja $\overline{AC} \cong \overline{DF}$. Mikäli $\angle B \cong \angle E$ on lause tosi SAS:n nojalla. Vastaavasti jos $\angle A \cong \angle D$ tai $\angle C \cong \angle F$. Tehdään vastaoletus, että kulmat eivät ole yhteneviä. Tällöin löytyy aina sellainen piste G, että voidaan muodostaa tasakylkiset kolmiot $\triangle BAG$ ja $\triangle CAG$, joiden kulmien suuruutta tutkimalla päädytään ristiriitaan. Todistus voidaan jakaa kolmeen eri tapaukseen.

(1) Olkoon piste G kuvan 3 mukaisesti kolmion $\triangle ABC$ ulkopuolella oleva piste siten, että $\angle GBC \cong \angle E$ ja $\angle GCB \cong \angle F$.



Kuva 3: SSS:n todistus

Tällöin kolmiot $\triangle GBC$ ja $\triangle DEF$ ovat yhteneviä ASA:n nojalla. Lauseen 3.3 todistamiseksi osoitetaan, että kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle GBC$ ovat yhteneviä.

Konstruoidaan jana $\overline{GA}$. Oletuksen mukaan $\overline{AB} \cong \overline{DE}$. Lisäksi $\overline{DE} \cong \overline{GB}$, sillä kolmiot $\triangle GBC$ ja $\triangle DEF$ ovat yhteneviä. Tällöin $\overline{AB} \cong \overline{GB}$ ja kolmio $\triangle BAG$ on tasakylkinen kolmio. Lisäksi lauseen 3.4 mukaan $\angle BAG \cong \angle BGA$. Vastaavin perustein kolmio $\triangle CAG$ on tasakylkinen kolmio ja $\angle CAG \cong \angle CGA$.

Tällöin voidaan kulmien suuruudesta päätellä seuraavaa:

$$\measuredangle BAG > \measuredangle CAG$$

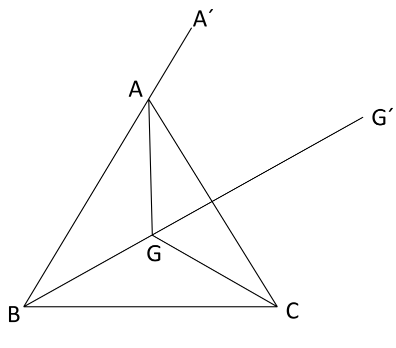
$$\angle CAG \cong \angle CGA$$

$$\measuredangle CGA > \measuredangle BGA$$

$$\angle BGA \cong \angle BAG.$$

Yhdistämällä edelliset päädytään ristiriitaiseen tulokseen $\measuredangle BAG > \measuredangle BAG$. Täten vastaoletus on väärin ja pisteen G on oltava piste A, jolloin $\angle GBC = \angle B \cong E$ ja SAS:n nojalla kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ ovat yhteneviä.

(2) Olkoon piste G sitten kuvan 4 mukaisesti kolmion $\triangle ABC$ sisäpuolella oleva piste. Tällöin, vastaavasti kuten tapauksessa (1), kolmiot $\triangle BAG$ ja $\triangle CAG$ ovat tasakylkisiä, jolloin $\angle BAG \cong \angle BGA$ ja $\angle CAG \cong \angle CGA$.



Kuva 4: SSS:n todistus

Jatketaan janaa $\overline{BA}$ janaksi $\overline{BA'}$ ja janaa $\overline{BG}$ janaksi $\overline{BG'}$. Tällöin kulma

$$\measuredangle A'AG = 180\,^\circ - \measuredangle BAG = 180\,^\circ - \measuredangle BGA = \measuredangle AGG'.$$

Kulmien suuruudesta voidaan nyt päätellä seuraavaa:

$$\measuredangle A'AG > \measuredangle CAG$$

$$\angle CAG \cong \angle CGA$$

$$\measuredangle CGA > \measuredangle AGG'.$$

Tässäkin tapauksessa päädytään ristiriitaiseen tulokseen

$$\measuredangle AGG' = \measuredangle A'AG > \measuredangle AGG'.$$

Täten vastaoletus on väärin ja piste G ei voi olla kolmion $\triangle ABC$ sisäpuolella, vaan pisteen G on oltava piste A, jolloin kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ ovat yhteneviä.

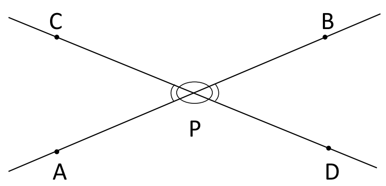
(3) Olkoon piste G kolmion $\triangle ABC$ sivulla $\overline{AC}$ oleva piste. Todistus sivuutetaan.

$\square$

3.3 Kulmista

Tässä kappaleessa esitellään kaksi kulmiin liittyvää lausetta, joiden tuloksia käytetään usein lukion tasogeometrian laskutehtävissä.

Lause 3.5. *(Ristikulmat ovat yhtenevät) Leikatkoon suorat $\overleftrightarrow{AB}$ ja $\overleftrightarrow{CD}$ pisteessä P kuvan 5 mukaisesti. Tällöin $\angle APC \cong \angle BPD$ ja $\angle APD \cong \angle BPC$.*



Kuva 5: Ristikulmat yhtenevät

Todistus. (Vrt. [4, s. 14]) Nyt $\measuredangle APC + \measuredangle APD = 180\,°$ ja $\measuredangle APD + \measuredangle BPD = 180\,°$.

Täten

$$\measuredangle APC = 180\,° - \measuredangle APD$$

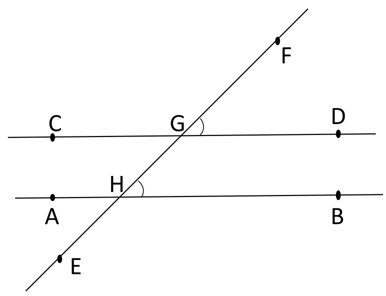
ja

$$\measuredangle BPD = 180\,° - \measuredangle APD.$$

Täten $\angle APC \cong \angle BPD$. Vastaavaan tapaan voidaan todistaa, että $\angle APD \cong \angle BPC$.

Tässä on kulmien suuruudeen yksikkönä käytetty asteita, kuten lukion geometrian kurssillakin yleisesti käytetään. Yliopistomatematiikassa käytetään asteiden sijaan radiaaneja. □

Lause 3.6. *(Samankohtaiset kulmat ovat yhtenevät) Olkoon suorat $\overleftrightarrow{AB}$ ja $\overleftrightarrow{CD}$ yhdensuuntaisia ja leikatkoon suora $\overleftrightarrow{EF}$ niitä kuvan 6 mukaisesti pisteissä G ja H. Tällöin samankohtaiset kulmat, $\angle BHF$ ja $\angle DGF$ ovat yhteneviä.*



Kuva 6: Samankohtaiset kulmat yhtenevät

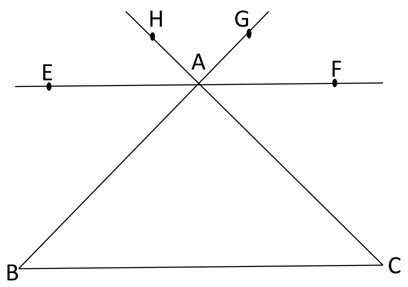
Todistus. Sivuutetaan. □

3.4 Kolmion ja nelikulmion kulmien summa

Tässä kappaleessa todistetaan kolmion kulmien summan olevan $180\,°$ ja nelikulmion kulmien summan olevan $360\,°$.

Lause 3.7. *(Kolmion kulmien summa) Olkoon kolmio $\triangle ABC$. Tällöin $\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180\,°$.*

Todistus. Olkoon $\overleftrightarrow{EF}$ kolmion kärjen A kautta kulkeva, sivun $\overleftrightarrow{BC}$ suuntainen suora. Jatketaan kolmion sivuja kuvan 7 mukaisesti.

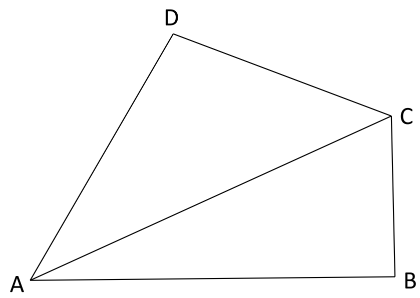


Kuva 7: Kolmion kulmien summa

Tällöin $\angle GAH \cong \angle BAC$, sillä ristikulmat ovat yhtenevät. Lisäksi $\angle FAG \cong \angle CBA$ ja $\angle HAE \cong \angle ACB$, sillä samankohtaiset kulmat ovat yhteneviä. Kulmien $\angle FAG$, $\angle GAH$ ja $\angle HAE$ summa on oikokulma eli kolmion kulmien summa on $180\,°$. □

Lause 3.8. *(Nelikulmion kulmien summa) Valitaan mielivaltainen nelikulmio $ABCD$. Tällöin $\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C + D = 360\,°$.*

Todistus. (Vrt. [4, s.24]) Suora $\overleftrightarrow{AC}$ jakaa nelikuomion kuvan 8 mukaisesti kahteen kolmioon.



Kuva 8: Nelikulmion kulmien summa

Tällöin $\measuredangle A = \measuredangle CAB + \measuredangle CAD$ ja $\measuredangle C = \measuredangle ACB + \measuredangle ACD$. Nyt nelikulmion kulmien summa on

$$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C + \measuredangle D$$

$$=\measuredangle CAB + \measuredangle CAD + \measuredangle B + \measuredangle ACB + \measuredangle ACD + \measuredangle D$$
$$=(\measuredangle ACD + \measuredangle D + \measuredangle DAC) + (\measuredangle CAB + \measuredangle B + \measuredangle BCA).$$

Ensimmäinen summa on kolmion $\triangle ACD$ kulmien ja jälkimmäinen summa on kolmion $\triangle CAB$ kulmien summa. Täten nelikulmion kulmien summaksi saadaan

$$(\measuredangle ACD + \measuredangle D + \measuredangle DAC) + (\measuredangle CAB + \measuredangle B + \measuredangle BCA) = 180\,^\circ + 180\,^\circ = 360\,^\circ.$$

$\square$

3.5 Pinta-aloista

Tässä kappaleessa käydään läpi monikulmioiden pinta-aloja. Monikulmion P pinta-alan merkitsemiseen käytetään merkintää $ala(P)$.

Jokaiseen monikulmioon P voidaan liittää ei-negatiivinen kokonaisluku, jota sanotaan monikulmion pinta-alaksi niin, että seuraavat ehdot ovat voimassa (Vrt. [4, s. 30]):

(A1) Yhtenevien monikulmioiden pinta-alat ovat yhtä suuret.

(A2) Jos monikulmio P voidaan jakaa kahteen, toisiaan leikkaamattomaan monikulmioon P_1 ja P_2, niin monikulmion P pinta-ala on monikulmioiden P_1 ja P_2 pinta-alojen summa. Toisin sanoen $ala(P) = ala(P_1) + ala(P_2)$.

(A3) Jos monikulmio P on neliö, jonka sivun pituus on 1, on monikulmion pinta-ala tällöin $ala(P) = 1$.

Luvussa 3 tutustuttiin kolmioiden yhtenevyyteen. Yleisesti kaksi monikulmiota $P_1P_2 \cdots P_n$ ja $Q_1Q_2 \cdots Q_n$ ovat yhteneviä, mikäli vastinsivut ja vastinkulmat ovat yhteneviä. Toisin sanoen mikäli ehdot

$$\overline{P_1P_2} \cong \overline{Q_1Q_2}, \ldots, \overline{P_nP_1} \cong \overline{Q_nQ_1}$$

ja

$$\angle P_1 \cong \angle Q_1, \ldots, \angle P_n \cong \angle Q_n$$

ovat voimassa. [4, s. 30]

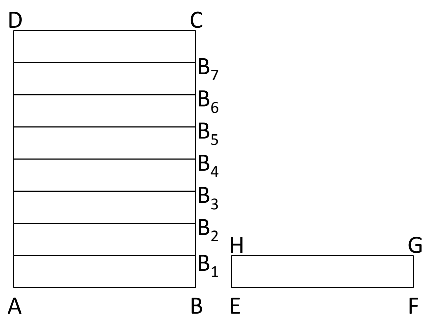
Tutustutaan seuraavaksi joihinkin suorakulmion pinta-alaan liittyviin lauseisiin.

Lause 3.9. *Olkoot $ABCD$ ja $EFGH$ suorakulmioita siten, että $\overline{AB} \cong \overline{EF}$ ja $BC = a \cdot FG$, missä a on jokin positiivinen reaaliluku. Tällöin $ala(ABCD) = a \cdot ala(EFGH)$.*

Todistus. (Vrt. [4, s.30-31])

Todistus voidaan jakaa kolmeen eri tapaukseen.

(1) Olkoon a aluksi positiivinen kokonaisluku. Tällöin sivu $\overline{BC}$ voidaan jakaa tasan sivun $\overline{FG}$ mittaisiin osiin, joita on a kappaletta. Nyt on siis olemassa kuvan 9 mukaisesti pisteet $B_1, B_2, \ldots, B_{a-1}$ siten, että $\overline{FG} \cong \overline{BB_1} \cong \overline{B_1B_2} \cong \cdots \cong \overline{B_{a-1}C}$.

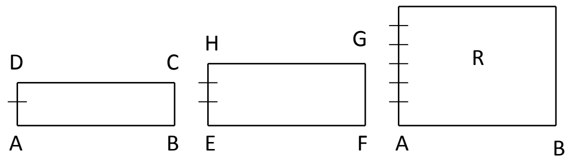


Kuva 9: Suorakulmion pinta-ala ($a = 8$)

Jokaisesta pisteestä B_i voidaan piirtää sivun $\overline{AB}$ suuntainen jana yhdistämään sivut $\overline{BC}$ ja $\overline{AD}$. Tällöin suorakulmio $ABCD$ on jaettu a:han pienempään, toisiaan leikkaamattomaan suorakulmioon. Jokaisen pienemmän suorakulmion kanta on yhtenevä sivun $\overline{EF}$ ja korkeus sivun $\overline{FG}$ kanssa, joten (A1):n mukaan jokaisen pienemmän suorakulmion pinta-ala on yhtä suuri kuin suorakulmion $EFGH$ pinta-ala. Lisäksi (A2):n mukaan suorakulmion

$ABCD$ pinta-ala on näiden pienempien suorakulmioiden pinta-alojen summa. Täten $ala(ABCD) = a \cdot ala(EFGH)$.

(2) Olkoon a sitten positiivinen rationaaliluku $a = \frac{n}{m}$, missä n ja m ovat kokonaislukuja. Konstruoidaan nyt kuvan 10 mukaisesti kolmas suorakulmio R, jonka kanta on yhtenevä sivujen $\overline{AB}$ ja $\overline{EF}$ kanssa. Lisäksi R:n korkeus on m kertaa sivu $\overline{BC}$. Toisaalta $BC = a \cdot FG = \frac{n}{m} \cdot FG$, joten $n \cdot FG = m \cdot BC$ eli R:n korkeus on myös n kertaa sivu FG.



Kuva 10: Suorakulmion pinta-ala ($a = \frac{2}{3}$)

Koska n ja m ovat kokonaislukuja, saadaan kohdan (1) perusteella

$$ala(R) = m \cdot ala(ABCD)$$

ja

$$ala(R) = n \cdot ala(EFGH).$$

Yhdistämällä edelliset voidaan kirjoittaa

$$m \cdot ala(ABCD) = n \cdot ala(EFGH)$$

eli

$$ala(ABCD) = \frac{n}{m} ala(EFGH) = a \cdot ala(EFGH).$$

(3) Tapaus, jossa a on positiivinen reaaliluku, todistetaan käyttäen rationaalilukujen kohdalla esitettyä ideaa. Tarkemmat yksityiskohdat sivuutetaan.

$\square$

Edellisen lauseen nojalla voidaan todistaa kaksi seurauslausetta, jotka esitellään seuraavana.

Lause 3.10. *Olkoon $ABCD$ suorakulmio, jossa $AB = 1$ ja $CB = h$. Tällöin suorakulmion pinta-alaksi saadaan $ala(ABCD) = h$.*

Todistus. (Vrt. [4, s.32]) Olkoon $EFGH$ neliö, jossa $EF = GH = 1$. Lauseen 3.9 mukaan $ala(ABCD) = h \cdot ala(EFGH)$ ja $(A3)$:n mukaan $ala(EFGH) = 1$, joten $ala(ABCD) = h$. $\square$

Lause 3.11. *Olkoon $ABCD$ suorakulmio, jossa $AB = b$ ja $BC = h$. Tällöin suorakulmion pinta-alaksi saadaan $ala(ABCD) = bh$.*

Todistus. (Vrt. [4, s.32]) Olkoon $EFGH$ suorakulmio siten, että $\overline{EF} \cong \overline{AB}$ ja $FG = 1$. Lauseen 3.9 mukaan $ala(ABCD) = h \cdot ala(EFGH)$ ja lauseen 3.10 mukaan $ala(EFGH) = b$, joten $ala(ABCD) = bh$. $\square$

Tutustutaan seuraavaksi kolmion pinta-alaan.

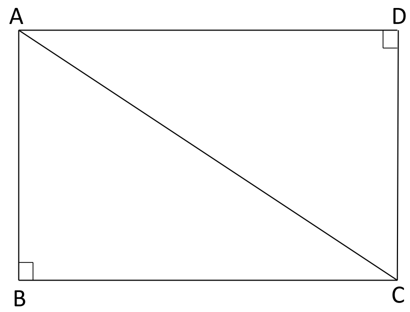
Lause 3.12. *Olkoon kolmion $\triangle ABC$ kanta a ja korkeus h. Tällöin kolmion pinta-alaksi saadaan $ala(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$.*

Todistus. (Vrt. [4, s. 32-34]) Todistus voidaan jakaa kolmeen eri tapaukseen, suorakulmaisen, teräväkulmaisen ja tylppäkulmaisen kolmion tapaukseen.

(1) Olkoon $\triangle ABC$ suorakulmainen kolmio, jonka kanta on sivu $\overline{BC}$ ja korkeus on $\overline{AB}$. Piirretään kuvan 11 mukaisesti kärjen A kautta sivun $\overleftrightarrow{BC}$ suuntainen suora ja kärjen C kautta sivun $\overleftrightarrow{AB}$ suuntainen suora, jotka leikkaavat pisteessä D.

Nelikulmion $ABCD$ vastinsivut ovat yhdensuuntaiset ja kulma B on suora kulma, joten kyseessä on suorakulmio, jonka pinta-ala on $ala(ABCD) = AB \cdot BC$. Toisaalta suorakulmion $ABCD$ pinta-ala on kolmioiden $\triangle ABC$ ja $\triangle ADC$ pinta-alojen summa. Lisäksi kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle ADC$ ovat yhteneviä, joten $ala(ABC) = ala(ADC)$. Tällöin

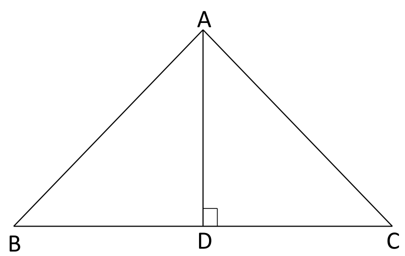
$$\begin{aligned} AB \cdot BC &= ala(ABCD) \\ &= ala(ABC) + ala(ADC) \\ &= ala(ABC) + ala(ABC) \\ &= 2 \cdot ala(ABC) \end{aligned}$$



Kuva 11: Suorakulmaisen kolmion pinta-ala

Täten $ala(ABC) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC$.

(2) Olkoon $\triangle ABC$ teräväkulmainen kolmio, jonka kanta on sivu $\overline{BC}$. Piirretään kuvan 12 mukaisesti kantaa vastaan kohtisuoraan kolmion korkeusjana, joka kulkee kärjen A kautta. Merkitään korkeusjanan ja kannan leikkauspistettä symbolilla D.



Kuva 12: Taräväkulmaisen kolmion pinta-ala

Tällöin kolmio $\triangle ABC$ jakaantuu kahteen suorakulmaiseen kolmioon, $\triangle ABD$ ja $\triangle ACD$, jolloin kolmion $\triangle ABC$ pinta-alaksi saadaan

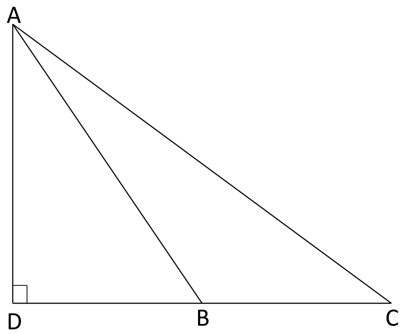
$$\begin{aligned} ala(ABC) &= ala(ABD) + ala(ACD) \\ &= \tfrac{1}{2}BD \cdot AD + \tfrac{1}{2}CD \cdot AD \\ &= \tfrac{1}{2}(BD + CD) \cdot AD \\ &= \tfrac{1}{2}BD \cdot AD. \end{aligned}$$

(3) Olkoon $\triangle ABC$ tylppäkulmainen kolmio, jonka kanta on sivu $\overline{BC}$. Jatketaan kuvan 13 mukaisesti kantaa ja piirretään kantasivun jatketta vastaan

kohtisuoraan kolmion korkeusjana, joka kulkee kärjen A kautta. Merkitään korkeusjanan ja kannan jatkeen leikkauspistettä symbolilla D.

Tällöin muodostuva suorakulmainen kolmio $\triangle ADC$ jakaantuu kahteen kolmioon, $\triangle ABD$ ja $\triangle ACD$, jolloin kolmion $\triangle ABC$ pinta-alaksi saadaan

$$\begin{aligned} ala(ABC) &= ala(ACD) - ala(ABD) \\ &= \tfrac{1}{2}CD \cdot AD - \tfrac{1}{2}BD \cdot AD \\ &= \tfrac{1}{2}(CD - BD) \cdot AD \\ &= \tfrac{1}{2}BC \cdot AD. \end{aligned}$$



Kuva 13: Tylppäkulmaisen kolmion pinta-ala

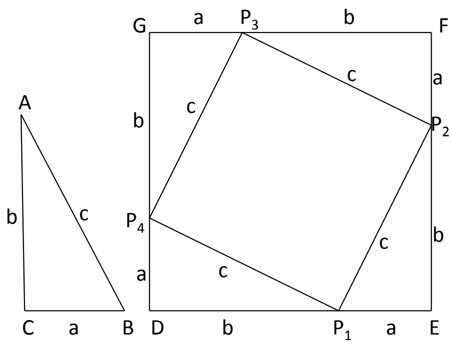
□

3.6 Pythagoraan lause

Monet tasogeometrian laskutehtävät liittyvät kolmioihin ja useiden tehtävien ratkaisemisessa käytetään apuna seuraavaksi todistettavaa Pythagoraan lausetta.

Lause 3.13. *Olkoon $\triangle ABC$ suorakulmainen kolmio, jonka kulma $\angle C$ on suora kulma. Käytetään kolmion sivujen pituuksille seuraavia merkintöjä: $AB = c$, $BC = a$ ja $AC = b$ kuvan 14 mukaisesti. Tällöin $a^2 + b^2 = c^2$.*

Todistus. (Vrt. [4, s.34-35]) Konstruoidaan kuvan mukainen neliö $DEFG$, jonka sivujen pituus on $a+b$. Valitaan neliön sivuilta pisteet P_1, P_2, P_3 ja P_4 siten, että $DP_1 = EP_2 = FP_3 = GP_4 = b$ ja $P_1E = P_2F = P_3G = P_4D = a$. Tällöin muodostuvat suorakulmaiset kolmiot $\triangle DP_1P_4$, $\triangle EP_2P_1$, $\triangle FP_3P_2$,



Kuva 14: Pythagoraan lause

ja $\triangle GP_4P_3$ ovat SAS:n nojalla yhteneviä kolmion $\triangle CAB$ kanssa. Tällöin $P_1P_2 = P_2P_3 = P_3P_4 = P_4P_1 = c$ ja monikulmio $P_1P_2P_3P_4$ on neliö, sillä sen kaikki kulmat ovat suoria. Tämä voidaan todeta esimerkiksi kulman $\angle P_4P_1P_2$ kohdalla seuraavasti:

$$
\begin{aligned}
\measuredangle P_4P_1P_2 &= 180\,^\circ - \measuredangle P_4P_1D - \measuredangle P_2P_1E \\
&= 180\,^\circ - \measuredangle A - \measuredangle B \\
&= \measuredangle C \\
&= 90\,^\circ.
\end{aligned}
$$

Neliön $DEFG$ pinta-ala voidaan laskea kahdella tavalla. Koska $DEFG$ on neliö, saadaan sen pinta-alaksi $ala(DEFG) = (a+b)\cdot(a+b)$. Toisaalta neliön $DEFG$ pinta-ala saadaan neliön $P_1P_2P_3P_4$ ja kolmioiden $\triangle DP_1P_4$, $\triangle EP_2P_1$, $\triangle FP_3P_2$, ja $\triangle GP_4P_3$ pinta-alojen summana, jolloin neliön $DEFG$ pinta-alaksi saadaan $ala(DEFG) = c^2 + 4\cdot\frac{1}{2}ab$.

Merkitsemällä neliön pinta-alat yhtäsuuriksi ja sieventämällä saadaan haluttu tulos:

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow (a+b)\cdot(a+b) = c^2 + 4\cdot\tfrac{1}{2}ab \\
&\Rightarrow a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 2ab \\
&\Rightarrow a^2 + b^2 = c^2.
\end{aligned}
$$

$\square$

3.7 Kolmioiden yhdenmuotoisuus

Yksi lukion pitkän matematiikan kurssin keskeisimmistä sisällöistä on kuvioiden yhdenmuotoisuus. Aiemmin perehdyttiin jo kolmioiden yhtenevyyteen ja nyt vuorostaan tutustutaan kolmioiden yhdenmuotoisuuteen.

Määritelmä 3.2. (Vrt. [4, s. 49]) Kaksi kolmiota, kolmio $\triangle ABC$ ja kolmio $\triangle DEF$ ovat yhdenmuotoiset, mikäli seuraavat kuusi ehtoa ovat voimassa:

1. $\angle A \cong \angle D$
2. $\angle B \cong \angle E$
3. $\angle C \cong \angle F$
4. $DE = k \cdot AB$
5. $EF = k \cdot BC$
6. $DF = k \cdot AC$

Tällöin voidaan kirjoittaa $\triangle ABC \triangle DEF$.

Yhdenmuotoisten kolmioiden tapauksessakaan ei aina tarvitse käydä läpi jokaista yllämainituista kuudesta ehdosta, jotta kolmioiden voidaan todeta olevan yhdenmuotoisia. Tässä luvussa perehdytään kolmeen, kolmioiden yhdenmuotoisuuteen liittyvään lauseeseen. Sitä ennen tutustutaan näiden lauseiden todistamisessa käytettävään apulauseeseen.

Lause 3.14. *Valitaan kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ siten, että $\angle A \cong \angle D$. Tällöin seuraava ehto on voimassa: $\frac{ala(\triangle ABC)}{ala(\triangle DEF)} = \frac{AB \cdot AC}{DE \cdot DF}$.*

Todistus. Sivuutetaan.

□

Perehdytään sitten kolmioiden yhdenmuotoisuuteen liittyviin lauseisiin.

Lause 3.15. *(Yhdenmuotoisten kolmioiden ASA) Jos $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$ ja $DE = k \cdot AB$, niin kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ ovat yhdenmuotoisia suhteessa k.*

Todistus. (Vrt. [4, s. 49-50]) Oletuksen mukaan $\angle A \cong \angle D$, joten lauseen 3.14 ehto on voimassa. Tällöin voidaan kirjoittaa

$$\frac{ala(\triangle DEF)}{ala(\triangle ABC)} = \frac{DE \cdot DF}{AB \cdot AC} = k \cdot \frac{DF}{AC}. \tag{3.2}$$

Vastaavasti, koska oletuksen mukaan $\angle B \cong \angle E$, voidaan kirjoittaa

$$\frac{ala(\triangle DEF)}{ala(\triangle ABC)} = \frac{DE \cdot EF}{AB \cdot BC} = k \cdot \frac{EF}{BC}. \tag{3.3}$$

Aiemmin todistettiin, että kolmion kulmien summa on $180\,^{\circ}$. Täten voidaan päätellä, että $\angle C \cong \angle F$ ja voidaan siis kirjoittaa

$$\frac{ala(\triangle DEF)}{ala(\triangle ABC)} = \frac{DE \cdot EF}{AC \cdot BC}. \tag{3.4}$$

Yhdistämällä yhtälöt 3.2 ja 3.4 saadaan $k \cdot \frac{DF}{AC} = \frac{DE \cdot EF}{AC \cdot BC}$, joka voidaan edelleen sieventää muotoon $EF = k \cdot BC$.

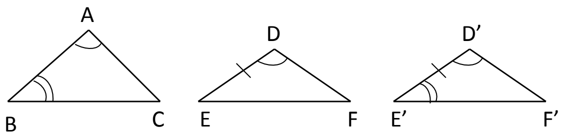
Vastaavasti yhdistämällä yhtälöt 3.3 ja 3.4 saadaan $DF = k \cdot AC$.

□

Lause 3.16. *(Yhdenmuotoisten kolmioiden SAS) Jos $\angle A \cong \angle D$, $DE = k \cdot AB$ ja $DF = k \cdot AC$, niin kolmio $\triangle ABC$ on yhdenmuotoinen kolmion $\triangle DEF$ kanssa suhteessa k.*

Todistus. (Vrt. [4, s. 50]) Konstruoidaan kuvan 15 mukaisesti kolmas kolmio $\triangle D'E'F'$ siten, että $\angle D' \cong \angle A$, $\angle E' \cong \angle B$ ja $\overline{D'E'} \cong \overline{DE}$. Oletuksen mukaan $DE = k \cdot AB$, joten $D'E' = k \cdot AB$. Tällöin lauseen 3.15 nojalla kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle D'E'F'$ ovat yhdenmuotoisia suhteessa k ja voidaan kirjoittaa $D'F' = k \cdot AC$. Toisaalta $DF = k \cdot AC$, joten $D'F' = DF$.

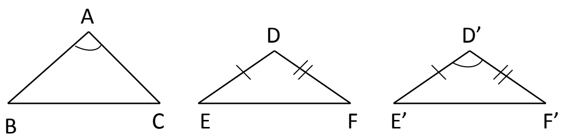
Vertaamalla kolmioita $\triangle DEF$ ja $\triangle D'E'F'$ havaitaan seuraavaa: $\angle D \cong \angle D'$, $\overline{DE} \cong \overline{D'E'}$ ja $\overline{DF} \cong \overline{D'F'}$, joten SAS:n nojalla kolmiot $\triangle DEF$ ja $\triangle D'E'F'$ ovat yhteneviä. Täten $\angle E \cong \angle E' \cong \angle B$, joten lauseen 3.15 nojalla kolmio $\triangle ABC$ on yhdenmuotoinen kolmion $\triangle DEF$ kanssa suhteessa k. □



Kuva 15: Yhdenmuotoisten kolmioiden SAS

Lause 3.17. *(Yhdenmuotoisten kolmioiden SSS) Jos* $DE = k \cdot AB$*,* $EF = k \cdot BC$ *ja* $DF = k \cdot AC$*, niin kolmiot* $\triangle ABC$ *ja* $\triangle DEF$ *ovat yhdenmuotoisia suhteessa* k*.*

Todistus. (Vrt. [4, s.51]) Konstruoidaan kuvan 16 mukaisesti kolmas kolmio $\triangle D'E'F'$ siten, että $\angle D' \cong \angle A$, $\overline{DE} \cong \overline{D'E'}$ ja $\overline{DF} \cong \overline{D'F'}$. Oletuksen mukaan $DE = k \cdot AB$, joten $D'E' = k \cdot AB$. Vastaavasti oletuksen mukaan $DF = k \cdot AC$, joten $D'F' = k \cdot AC$. Tällöin lauseen 3.16 nojalla kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle D'E'F'$ ovat yhdenmuotoisia suhteessa k.



Kuva 16: Yhdenmuotoisten kolmioiden SSS

Nyt $E'F' = k \cdot BC$ ja lisäksi oletuksen mukaan $EF = k \cdot BC$, joten $\overline{EF} \cong \overline{E'F'}$ ja kolmiot $\triangle DEF$ ja $\triangle D'E'F'$ ovat yhteneviä SSS:n nojalla. Täten kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ ovat yhdenmuotoisia suhteessa k.

□

Puhuttaessa yhdenmuotoisista kolmioista ei ole välttämätöntä ilmaista yhdenmuotoisuussuhdetta k, sillä se voidaan määrittää kolmioista itsestään. Kolmioiden $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ ollessa yhdenmuotoisia, saadaan yhdenmuotoisuussuhteeksi $k = \frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{DF}{AC}$. Tämän perusteella voidaan kirjoittaa seuraava määritelmä:

Määritelmä 3.3. Kaksi kolmiota, $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$, ovat yhdenmuotoisia jos $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$ ja $\angle C \cong \angle F$ sekä kolme lukua $\frac{DE}{AB}$, $\frac{EF}{BC}$ ja $\frac{DF}{AC}$ ovat yhtäsuuret eli $k = \frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{DF}{AC}$. Tällöin kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ ovat yhdenmuotoisia. [4, s. 51]

Määritelmän 3.3 nojalla voidaan nyt esittää viisi teoreemaa (Vrt. [4, s. 51-52]).

Lause 3.18. *(Yhdenmuotoisten kolmioiden AA) Jos $\angle A \cong \angle D$ ja $\angle B \cong \angle E$ niin kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ ovat yhdenmuotoisia.*

Lause 3.19. *(Yhdenmuotoisten kolmioiden SAS) Jos $\angle A \cong \angle D$ ja $\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC}$, niin kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ ovat yhdenmuotoisia.*

Lause 3.20. *(Yhdenmuotoisten kolmioiden SSS) Jos $\frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{DF}{AC}$, niin kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ ovat yhdenmuotoisia.*

Lause 3.21. *(Yhdenmuotoisten kolmioisen SAS) Jos $\angle A \cong \angle D$ ja $\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$, niin kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ ovat yhdenmuotoisia.*

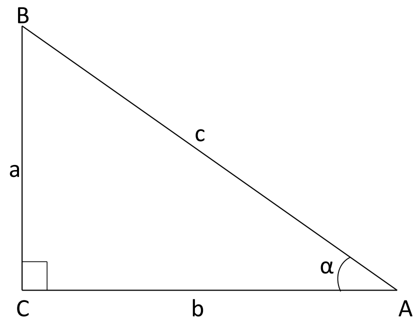
Lause 3.22. *(Yhdenmuotoisten kolmioiden SSS) Jos $\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$ ja $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$, niin kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ ovat yhdenmuotoisia.*

3.8 Trigonometriaa

Yksi lukion pitkän matematiikan geometrian kurssin tärkeimmistä aihealueista on trigonometria, johon perehdytään tarkemmin tässä luvussa.

Määritellään aluksi terävän kulman sini, kosini ja tangentti. Olkoon kolmio $\triangle ABC$ kuvan 17 mukainen suorakulmainen kolmio, jonka hypotenuusa on $\overline{AB} = c$ ja jonka kateetit ovat $\overline{BC} = a$ ja $\overline{AC} = b$. Olkoon kulma $\angle C$ suora kulma ja merkitään kulmaa $\angle A$ symbolilla α. Tällöin voidaan terävän kulman α sini $\sin\alpha$, kosini $\cos\alpha$ ja tangentti $\tan\alpha$ määritellä siten, että $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ ja $\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. [5, s. 61]

Määritellään sitten suoran- ja tylpän kulman sini, kosini ja tangentti. Suoran kulman sini ja kosini määritellään siten, että $\sin\alpha = 1$ ja $\cos\alpha = 0$. Suoran kulman α tangentti $\tan\alpha$ jätetään määritelemättä. [5, s. 61]



Kuva 17: Trigonometriaa

Tylpän kulman α vieruskulma ϕ on terävä kulma. Tällöin määritellään $\sin\alpha = \sin\phi$, $\cos\alpha = -\cos\phi$ ja $\tan\alpha = -\tan\phi$. [5, s. 61]

Tutustutaan ensiksi sinin ja kosinin peruskaavaan.

Lause 3.23. *Kaikille kulmille α pätee $sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.*

Todistus. (Vrt. [5, s.62]) Todistus voidaan jakaa kolmeen eri tapaukseen.

(1) Jos α on suora kulma, niin $sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1^2 + 0 = 1$.

(2) Jos α on terävä kulma, niin Pythagoraan lauseen avulla saadaan $sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2+b^2}{c^2} = 1$.

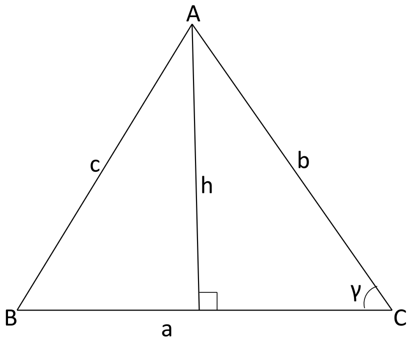
(3) Jos α on tylppä kulma, niin sen vieruskulma ϕ on terävä ja $sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \sin^2\phi + \cos^2\phi = 1$.

□

Tarkastellaan seuraavaksi kolmion alan sinikaavaa.

Lause 3.24. *Jos kolmion $\triangle ABC$ sivujen a ja b välinen kulma on γ, niin kolmion pinta-ala on $ala(\triangle ABC) = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$.*

Todistus. (Vrt. [5, s. 62]) Olkoon h sivua a vastaan kohtisuoraan piirretyn korkeusjanan pituus kuvan 18 mukaisesti. Tällöin $ala(\triangle ABC) = \frac{1}{2}ah$. Määritelmän mukaan $\sin\gamma = \frac{h}{b}$, jolloin $h = b\sin\gamma$ ja kolmion pinta-alaksi saadaan $ala(\triangle ABC) = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$. □



Kuva 18: Kolmion alan sinikaava

Sini- ja kosinilauseet ovat säilyttäneet asemansa geometrian kurssin keskeisimpinä oppisisältöinä. Tutustutaan seuraavaksi sinilauseeseen.

Lause 3.25. *Jos kolmion sivut ovat a, b ja c ja niiden vastaiset kulmat α, β ja γ, niin tällöin* $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$.

Todistus. Olkoon h sivua a vastaan kohtisuoraan piirretyn korkeusjanan pituus. Tällöin korkeusjana h voidaan ilmaista kahdella eri tavalla, $h = b\sin\gamma$ ja $h = c\sin\beta$. Nyt siis $b\sin\gamma = c\sin\beta$, mikä voidaan edelleen ilmaista muodossa $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$.

Toisaalta korkeusjana h voidaan piirtää sivua b vastaan kohttisuoraan, jolloin vastaavalla tavalla kuin edellä päädytään tulokseen $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$. Piirrettäessä korkeusjana h sivua c vastaan kohtisuoraan päädytään puolestaan tulokseen $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$. Yhdistettäessä kaikki edelliset saadaan $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$.

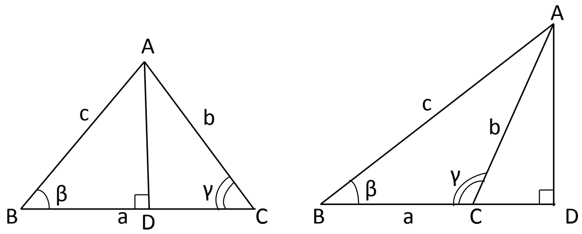
□

Tutustutaan vielä kosinilauseeseen.

Lause 3.26. *Jos kolmion sivut ovat a, b ja c sekä c:n vastainen kulma γ, niin* $c^2 = a^2 + b^2 - 2bc\cos\gamma$.

Todistus. (Vrt. [5, s.63-64]) Tarkastellaan kolmiota $\triangle ABC$. Jos kulma γ on suora kulma, on kyseessä Pythagoraan lause. Tarkastellaan siis tapaukset, joissan kulma γ on terävä tai tylppä kulma. Voidaan olettaa, että sivun b vastainen kulma β on kuvan 19 mukaisesti terävä kulma. Olkoon AD sivua a vastaan piirretty korkeusjana. Jos kulma γ on terävä kulma, niin $\frac{BD}{c} = \cos\beta$

ja $\frac{CD}{b} = \cos\gamma$, jolloin saadaan $a = BD + CD = c\cos\beta + b\cos\gamma$ ja edelleen $c\cos\beta = a - b\cos\gamma$. Neliöön korottamalla saadaan edellinen yhtälö muotoon $c^2cos^2\beta = a^2 + b^2cos^2\gamma - 2ab\cos\gamma$. Lisäksi sinilauseen perusteella $c^2sin^2\beta = b^2sin^2\gamma$ ja väitös seuraa laskemalla edelliset kaksi yhtälöä yhteen.



Kuva 19: Kosinilause

Jos kulma γ on kuvan 19 mukaisesti tylppä kulma, niin $\frac{BD}{c} = \cos\beta$ ja $\frac{CD}{b} = -\cos\gamma$, jolloin saadaan $a = BD - CD = c\cos\beta + b\cos\gamma$ ja todistus jatkuu samaan tapaan kuin terävän kulman tapauksessa.

$\square$

3.9 Ympyrä

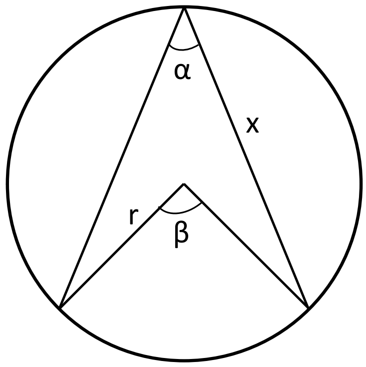
Ympyrän, sen osien ja siihen liittyvien suorien geometrian opiskelu kuuluu osana lukion geometrian kurssiin. Tässä kappaleessa kerrataan aihetta.

Ympyrä määritellään sen keskipisteen ja säteen avulla. Olkoon pisteet O ja A eri pisteitä. Tällöin O-keskinen ja OA säteinen ympyrä on niiden pisteiden B joukko, joille on voimassa $OB \cong OA$. Ympyrän keskipiste on O ja säde OA. Ympyröitä, joilla on sama keskipiste kutsutaan samankeskisiksi ja ympyröitä, joiden säteet ovat yhtenevät kutsutaan samansäteisiksi tai yhteneviksi. [5, s. 35]

Jänne on kahden ympyrän kehällä olevan pisteen välinen yhdysjana ja keskipisteen kautta kulkevaa jännettä kutsutaan halkaisijaksi [4, s. 59]. Suoraa, joka sivuaa ympyrää yhdessä pisteessä kutsutaan tangentiksi. Tangentti on kohtisuorassa ympyrän sädettä vastaan [7, s. 33]

r-säteisen ympyrän kehän pituus on $2\pi r$ ja pinta-ala πr^2. [7, s. 58-59]

Kehäkulma on kulma, jonka kärki on ympyrän kehällä ja jonka kyljet leikkaavat ympyrää [7, s. 84]. Keskuskulma puolestaan on kulma, jonka kärki on ympyrän keskipisteessä [6, s. 190]. Kuvassa 20 on esitetty ympyrän säde r, jänne x, kehäkulma α ja keskuskulma β.



Kuva 20: Ympyrä

3.10 Avaruusgeometriaa

Avaruusgeometria on tärkeä osa lukion geometrian kurssin oppisisältöjä. Avaruusgeometrian kohdalla opiskelu keskittyy pääasiassa kappaleiden hahmottamiseen, minkä lisäksi harjoitellaan laskemaan kappaleiden tilavuuksia sekä kappaleiden osien pinta-aloja. Tässä luvussa kerrataan tärkeimpien lukion pitkän matematiikan geometrian kurssilla opiskeltavien avaruuskappaleiden ominaisuuksia.

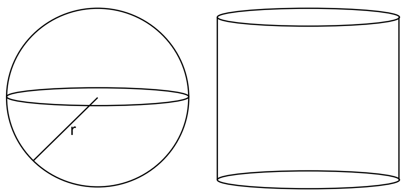
Pallolla tarkoitetaan avaruusgeometriassa suljettua pintaa, joka muodostuu kaikista niistä pisteistä, joiden etäisyys annettuun pisteeseen on vakio. Etäisyyttä kutsutaan pallon säteeksi ja annettua pistettä pallon keskipisteeksi. r-säteisen pallon pinta-ala on $4\pi r^2$ ja tilavuus $\frac{4}{3}\pi r^3$. [6, s. 299]

Pintaa, joka muodostuu suoran liikkuessa avaruudessa suuntaansa muuttamatta, kutsutaan lieriöpinnaksi. Pinnan muodostajasuoran palatessa lähtökohtaansa muodostuu suljettu pinta. Lieriöllä tarkoitetaan kappaletta, joka muodostuu suljetun, itseään leikkaamattoman lieriöpinnan ja kahden yhdensuuntaisen tason rajoittamana. Lieriöpintaan kuuluvaa kappaleen pinnan osaa kutsutaan vaipaksi ja tasoihin kuuluvia osia pohjiksi. Pohjat ovat yhteneviä. Pohjien välinen kohtisuora etäisyys on lieriön korkeus ja pohjien välinen muodostajasuoran osa on nimeltään sivujana. Suoran lieriön sivujana on kohtisuorassa pohjia vastaan. Muussa tapauksessa kyseessä on vino lieriö. [7, s. 60]

Ympyrälieriön pohjat ovat ympyröitä. Särmiöksi puolestaan kutsutaan lieriötä, jonka pohjat ovat monikulmioita. Särmiön vaippa muodostuu monikulmioista ja suuntaissärmiöksi puolestaan kutsutaan särmiötä, jonka pohjatkin ovat suunnikkaita. [7, s. 60-61]

Suoran lieriön vaipan pinta-ala lasketaan pohjan piirin ja lieriön korkeuden tulona. Lieriön tilavuus puolestaan lasketaan pohjan pinta-alan ja lieriön korkeuden tulona. [7, s. 61-63]

r-säteinen pallo ja suora ympyrälieriö on esitetty kuvassa 21.

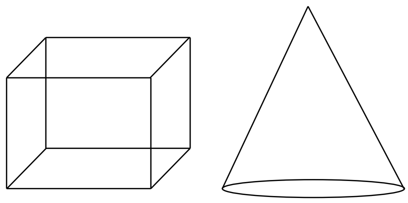


Kuva 21: Pallo ja suora ympyrälieriö

Suuntaissärmiötä, jonka kannat ovat suorakulmioita ja tahkot ovat kantoja vastaan kohtisuorassa kutsutaan suorakulmaiseksi särmiöksi. Jos samasta nurkasta lähtevien särmien pituudet ovat a, b ja c, on kappaleen tilavuus abc. Lisäksi tällöin suorakulmaisen särmiön kokonaispinta-ala on $2(ab + bc + ca)$ ja avaruuslävistäjän pituus $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. [6, s. 363]

Pintaa, joka muodostuu suoran liikkuessa avaruudessa kulkien koko ajan saman kiinteän pisteen kautta kutsutaan kartiopinnaksi. Kartiolla tarkoitetaan kappaletta, joka muodostuu suljetun, itseään leikkaamattoman kartiopinnan ja tason rajoittamana. Edellä mainittu kiinteä piste on nimeltään kartion kärki eli huippu. Kartiopintaan kuuluvaa kappaleen pinnan osaa kutsutaan vaipaksi ja tasoon kuuluvaa osaa pohjaksi. Pohjan ja kärjen välinen kohtisuora etäisyys on kartion korkeus ja kärjen ja pohjan välinen muodostajasuoran osa on nimeltään sivujana. Ympyräkartion pohja on ympyrä. Tällöin pohjan keskipisteen ja kärjen välistä yhdysjanaa kutsutaan akseliksi. Mikäli akseli on kohtisuorassa pohjaa vastaan, on kyseessä suora ympyräkartio. Kartion tilavuus on kolmannes pohjan pinta-alan ja kartion korkeuden tulosta. [7, s. 63-64]

Kuvassa 22 on esitetty suorakulmainen särmiö ja suora ympyräkartio.



Kuva 22: Suorakulmainen särmiö ja suora ympyräkartio

4 Ylioppilastehtävistä

Tässä luvussa tarkastellaan aluksi hieman pitkän matematiikan ylioppilaskokeen rakennetta, minkä jälkeen perehdytään geometrian kurssin oppisisältöihin pohjautuviin ylioppilastehtäviin vuosien 1991 ja 2010 väliseltä ajalta. Tarkoituksena on tutkia, onko jokin tehtävätyyppi erityisen suosittu ja liittyvätkö tehtävät opetussuunnitelman keskeisimpien sisältöjen aihepiireihin.
Vuonna 1991 pitkän matematiikan ylioppilaskoe koostui kymmenestä tehtävästä, joista osassa oli vaihtoehtoisia kohtia. Vuoden 2000 keväällä kokeen rakenne muuttui kymmenestä tehtävästä viiteentoista tehtävään. Tehtävistä sai ratkaista kymmenen tehtävää. Jokaisen tehtävän maksimipistemäärä oli kuusi pistettä, jolloin koko kokeen maksimipistemääräksi muodostui 60 pistettä. Keväästä 2007 alkaen pitkän matematiikan ylioppilaskokeen kaksi viimeistä tehtävää ovat olleet vaativampia tehtäviä. Näiden tehtävien maksimipistemäärä on 9 pistettä, jolloin koko kokeen maksimipistemäärä on noussut 66:een pisteeseen. [8, s. 49] [9, s. 53]
Tarkastellaan seuraavaksi geometrian kurssin oppisisältöihin liittyviä pitkän matematiikan ylioppilastehtävien tehtävätyyppejä, sekä tehtävien osaamista ja suosiota.

4.1 Tehtävätyypeistä

Tässä osiossa keskitytään tarkastelemaan geometrian kurssin oppisisältöihin pohjautuvien pitkän matematiikan ylioppilastehtävien tehtävätyyppejä vuosien 1991 ja 2010 väliseltä ajalta. Lisäksi tarkoituksena on havainnoida geometrian tehtävien suosiota ja osaamista.
Tarkasteltavista tehtävistä osa ratkeaa täysin geometrian kurssin oppisisältöjen avulla. Osassa tehtävistä puolestaan kokelaan edellytetään tehtävän ratkaistakseen soveltavan myös muilla pitkän matematiikan kursseilla opittuja taitoja. Seuraavaan taulukkoon, taulukko 1, on koottu geometrian kurssin oppisisältöihin liittyvät tehtävät jaoteltuina eri tehtävätyyppeihin. Mukana on myös tehtäviä, joiden ratkaisemisessa tarvitaan myös muilla kursseilla opiskeltuja taitoja.

Kuten aiemmin todettiin, taulukkoon 1 on kerätty kaikki ne tehtävät, Taulukko 1: *Geometriaan liittyvien yo-tehtävien tehtävätyypit*

Tehtävätyyppi	Tehtävä (Koe/Tehtävä)
Monikulmion kulmien summa	S92/2b K93/4a
Tasokuvioiden yhdenmuotoisuus	K92/4a S99/5 K04/7 K05/6
Tasokuvion pinta-ala	K95/5b S95/3b S96/3 K97/5 K00/1 S02/7 K03/2 S03/2 S03/7 K05/7 S06/3 K08/15a
Pythagoraan lause	K91/10 K94/2b S98/6 S04/2 K06/3 S08/5 K10/10
Trigonometriaa	S95/8a K96/10a K97/7 S97/2b S97/7a K98/2 K99/3 S99/1 K00/5 S00/4 S02/6 K04/6 S05/2 S06/7 K07/9 S07/6 K08/8 10/3a
Ympyrä	S92/8 S94/2 K95/8 S95/5b S96/7b S03/9
Pallo	K91/7a S99/2a S99/8a S01/6 K03/13
Lieriö	S91/7b S92/7a S94/4a S95/6 K97/1 K02/4 K03/8
Suorakulmainen särmiö	K95/3b K98/6 S98/10a S04/3 S09/4
Kartio	K91/5b K94/4a S05/5 S08/4
Useampi avaruuskappale	K98/8a K99/5a K02/10 K10/4
Muut	S93/9 S93/10 K99/6b K00/10 K01/11 S06/9 K09/14

joiden ratkaiseminen edellyttää geometrian kurssilla opiskeltavien asioiden hallintaa. Useat tehtävistä eivät kuitenkaan koostu ainoastaan geometrian kurssin asioista, vaan sisältävät myös esimerkiksi prosentti- tai differentiaalilaskentaa. Tehtävien jaottelu edellisen taulukon mukaisiin ryhmiin on haastavaa, sillä joitakin tehtäviä voisi merkitä useampaankin ryhmään kuuluvaksi. Kategoriaan Muut on koottu tehtävät, jotka eivät selkeästi kuulu mihinkään edellämainittuun tehtävätyyppiin.

Taulukon 1 perusteella havaitaan, että trigonometriaan sekä erilaisiin avaruuskappaeisiin liittyvät tehtävät muodostavat suuren osan geometrian ylioppilastehtävistä. Kuitenkin on huomattava, että useissa geometrian tehtävissä perusasioiden, kuten kuvioiden yhdenmuotoisuuden, tasokuvioiden ja avaruuskappaleiden ominaisuuksien sekä Pythagoraan lauseen, hallinta on tehtävän ratkaisun edellytys. Vaativampaa tehtävää ei pysty ratkaisemaan osaamatta soveltaa perusasioita tehtävänannon tulkitsemisessa ja ratkaisun alkuun pääsemisessä. Lisäksi miltei kaikkien geometrian ylioppilastehtävien ratkaiseminen edellyttää kuvan piirtämistä. Tässä kohtaa avaruudellinen hahmottaminen on ensiarvoisen tärkeää. Geometrian tehtävän ratkaiseminen tulisi aina aloittaa hahmottelemalla tilannetta sopivalla kuvalla. Kuvan piirtäminen selkeyttää kokelaalle, mitä tehtävässä kysytään ja mistä tehtävän ratkaiseminen kannattaa aloittaa.

Tarkastellaan seuraavaksi pitkän matematiikan ylioppilaskokeiden geometriaan liittyvien tehtävien osaamista ja suosiota. Seuraaviin taulukoihin, taulukot 2 ja 3, on koottu tilastotietoja geometrian ylioppilastehtävistä kymmenen vuoden ajalta. Ajanjaksoksi on valittu vuodet 1997-2006, sillä vuonna 2007 pitkän matematiikan ylioppilaskokeen tehtävien pistemäärä muuttui. Lisäksi suurin osa kokelaista osallistuu ylioppilaskirjoituksiin keväällä, jonka vuoksi tilastoinnissa on otettu huomioon vain kevään kokeet.

Taulukoista käy ilmi jokaisesta geometrian tehtävästä saatujen pisteiden keskiarvo sekä vastaajien prosentuaalinen osuus. Kevään 2000 koe oli ensimmäinen koe, jossa kokelaalla oli mahdollisuus valikoida tehtävänsä. Vuoteen 1999 asti kokeessa oli kymmenen tehtävää, joista jokaiseen vastattiin. Lisäksi on vielä huomattava, että taulukoihin on koottu ainoastaan sellaiset tehtävät, jotka käsittelevät kokonaisuudessaan geometrian osa-alueita, sillä tilastotietoja on saatavissa ainoastaan tehtäväkohtaisesti ilman a, b ja c kohtiin jaottelua.

Taulukko 2: *Tilastotietoja geometrian yo-tehtävistä 1997-2001*

Koe	K97	K97	K97	K98	K98	K99	K00	K00	K00	K01
Tehtävä	1	5	7	2	6	3	1	5	10	11
Keskiarvo	5,4	1,7	2,4	4,4	3,6	2,5	5,0	4,0	2,5	1,9
Vastaajia (%)	98,8	58,4	91,3	97,7	88,6	95,9	100	86	25	45

Taulukko 3: *Tilastotietoa geometrian yo-tehtävistä 2002-2006*

Koe	K02	K02	K03	K03	K03	K04	K04	K05	K05	K06
Tehtävä	4	10	2	8	13	6	7	6	7	3
Keskiarvo	3,6	0,3	3,8	1,5	1,4	3,6	2,1	1,4	2,9	4,4
Vastaajia (%)	98	58	98	70	21	87	77	64	51	98

Taulukoihin koottujen tilastojen perusteella voidaan havaita, että niin geometrian ylioppilastehtävien suosio kuin tehtävistä keskimäärin saatu pistemäärä vaihtelee. Voidaan kuitenkin todeta, että kokeen alkupään tehtävien suosio vaikuttaa olevan hieman suurempi kuin loppupään. Yleisesti ottaen geometrian tehtävät vaikuttavat kuitenkin suosituilta, sillä taulukkoon kootuista kahdestakymmenestä tehtävästä yhteentoista tehtävään on vastannut yli 85 prosenttia kokelaista ja vain kolmeen tehtävään on vastannut alle 50 prosenttia kokelaista.

Tehtävistä keskimäärin saatu pistemäärä on myös melko hyvä. Taulukkoon kootuista kahdestakymmenestä tehtävästä yhdeksästä on saatu yli kolme pistettä ja vain viiden tehtävän keskimääräinen pistemäärä on jäänyt alle kahden pisteen. Kevään 1997 kokeen ensimmäisestä tehtävästä on saatu tarkastelujakson korkein pistekeskiarvo 5,4 pistettä. Heikoin pistekeskiarvo puolestaan on tullut kevään 2003 kokeen toisesta tehtävästä, jolloin pistekeskiarvo on ollut 0,3 pistettä. Tilastointia tarkasteltaessa on kuitenkin huomattava, että osa taulukkoon kootuista tehtävistä sisältää myös muiden kurssien asioita, kuten differentiaali- ja prosenttilaskentaa. Lisäksi tarkasteluotos on hyvin pieni, joten laajemmin mitään varmaa geometrian tehtävien osaamisesta tai

suosiosta ei voida sanoa.
Seuraavassa luvussa käydään läpi muutamia pitkän matematiikan ylioppilaskokeen geometrian osuuden esimerkkitehtäviä vuosien 1991 ja 2010 väliseltä ajalta.

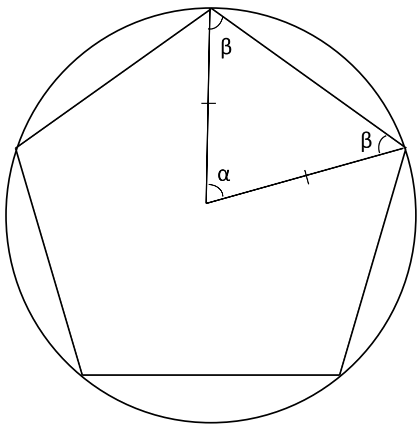
4.2 Mallitehtäviä

Tässä luvussa käydään läpi pitkän matematiikan ylioppilaskokeen geometrian tehtäviä vuosien 1991 ja 2010 väliseltä ajalta. Tarkoituksena on perehtyä taulukon 1 tehtävätyyppien jaottelun mukaisesti yhteen mallitehtävään jokaisesta tehtävätyypistä.

Ensimmäinen mallitehtävä on vuoden 1992 syksyn ylioppilaskokeen tehtävä numero 2b. Tehtävä käsittelee monikulmion kulmien summaa ja sen ratkaiseminen edellyttää kokelaalta geometrian kurssin perusasioiden hallintaa.

S92/2b, tehtävänanto: Johda lauseke säännölliselle n-kulmion kulmalle.

Ratkaisu: Tehtävän ratkaisussa pääsee hyvään alkuun piirtämällä tilannetta hahmottavan kuvan, jossa säännöllisen monikulmion ympäri on piirretty ympyrä.



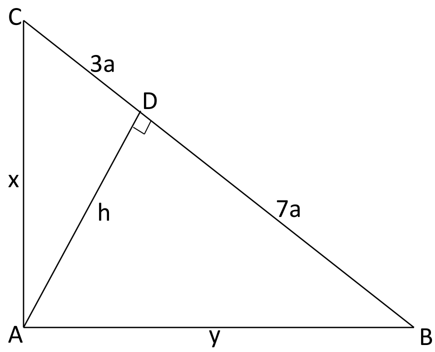
Kuva 23: Monikulmion kulmien suuruus

Ympyrän keskipiste voidaan yhdistää säännöllisen n-kulmion kärkiin. Tällöin muodostuu n kappaletta tasakylkisiä kolmioita, joiden huippukulman suuruus on $\alpha = \frac{360\,°}{n}$ ja ja kantakulman suuruus on $\beta = \frac{180\,°-\alpha}{2}$. Nyt n-kulmion kulman suuruudeksi saadaan $2\beta = 180\,° - \alpha = 180\,° - \frac{360\,°}{n} = \frac{n \cdot 180\,° - 360\,°}{n} = \frac{n-2}{n} \cdot 180\,°$.

Myös toinen mallitehtävä keskittyy geometrian kurssin perusasioihin, tasokuvioiden yhdenmuotoisuuteen.

K04/7, tehtävänanto: Suorakulmaisen kolmion hypotenuusalle piirretty korkeusjana jakaa hypotenuusan suhteessa 3:7. Määritä kateettien pituuksien suhde.

Ratkaisu: Piirretaan aluksi kuvan 24 mukainen kolmio, jossa kolmio ABC on korkeusjanan avulla jaettu kahteen, kolmion ABC kanssa yhdenmuotoiseen, kolmioon ABD ja ADC (yhdenmuotoisten kolmioiden AA).



Kuva 24: Tasokuvioiden yhdenmuotoisuus

Nyt yhdenmuotoisille kolmioille voidaan kirjoittaa verrannot:

$$\frac{x}{10a} = \frac{3a}{x}$$
$$\Rightarrow x^2 = 30a^2$$
$$\Rightarrow x = \sqrt{30}a$$

ja

$$\frac{y}{10a} = \frac{7a}{y}$$
$$\Rightarrow y^2 = 70a^2$$
$$\Rightarrow y = \sqrt{70}a$$

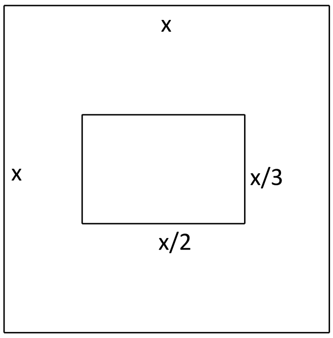
Tällöin katettien pituuksien suhteeksi saadaan

$$\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{30a}}{\sqrt{70a}} = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{70}} = \sqrt{\frac{30}{70}} = \sqrt{\frac{3}{7}}.$$

Myös kolmannen ja neljännen mallitehtävän ratkaiseminen menestyksekkäästi edellyttää kokelaalta ainoastaan geometrian perusasioiden hallintaa, tasokuvioiden pinta-alan määrittämistä sekä Pythagoraan lauseen soveltamista.

S95/3b, tehtävänanto: Neliön muotoiselle tontille rakennetaan suorakaiteen muotoinen talo, jonka pitempi sivu on puolet tontin sivusta ja lyhyempi kolmasosa tontin sivusta. Piha-aluetta jää tallöin $400m^2$. Laske tontin ala.

Ratkaisu: Käytetään tontin ja talon sivun pituuksille kuvan 25 mukaisia merkintöjä.



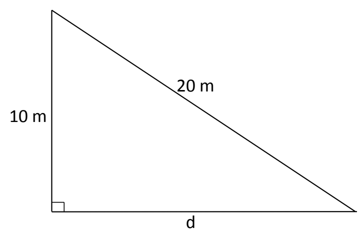
Kuva 25: Tasokuvion pinta-ala

Neliön muotoisen tontin pinta-alaksi saadaan $x^2(m^2)$ ja suorakaiteen muotoisen talon pinta-alaksi puolestaan $\frac{x^2}{6}(m^2)$. Tontin pinta-ala voidaan määrittää seuraavasti:

$$x^2 - \frac{x^2}{6} = 400$$
$$\Rightarrow \frac{5x^2}{6} = 400$$
$$\Rightarrow x^2 = \frac{6 \cdot 400}{5}$$
$$\Rightarrow x^2 = 480(m^2)$$

K94/2b, tehtävänanto: Puu, jonka korkeus oli 30 metriä, taittui 10 metrin korkeudelta, ja latvaosa taittui maahan irtoamatta tyviosasta. Kuinka kaukana latva osui maahan?

Ratkaisu: Maan pinta, puun pystyyn jäänyt tyviosa sekä taittunut latvaosa muodostavat kuvan 26 mukaisen suorakulmaisen kolmion.



Kuva 26: Pythagoraan lause

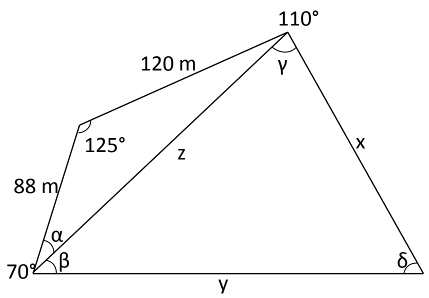
Pythagoraan lauseen nojalla etäisyydeksi saadaan

$$d = \sqrt{20^2 - 10^2} = \sqrt{300} \approx 17(m)$$

Viidennessä mallitehtävässä tutkitaan kokelaan trigonometrian osaamista kattavasti. Tehtävän ratkaiseminen edellyttää sini- ja kosinilauseiden hallintaa. Lisäksi tehtävän alkuun pääsee ainoastaan geometrisen hahmottamisen avulla.

S06/7, tehtävänanto: Nelikulmion muotoisen tontin kolme peräkkäistä kulmaa ovat mittausten mukaan $70\,^\circ$, $125\,^\circ$ ja $110\,^\circ$, näiden välisten rajalinjojen pituudet ovat (samassa järjestyksessä) 88 metriä ja 120 metriä. Kuinka suuri on tontin neljäs kulma? Mitkä ovat tonti kahden muun sivun pituudet? Ilmoita pituudet metrin tarkkuudella.

Ratkaisu: Tämän tehävän ratkaistaakseen kokelaan pitää piirtää kuva.



Kuva 27: Trigonometriaa

Ratkaistaan ensiksi tontin neljännen kulman suuruus. Nelikulmion kulmien summa on $360\,^\circ$, jolloin kuvan 24 merkintöjä käyttäen neljännen kulman suuruudeksi saadaan

$$\delta = 360\,^\circ - 70\,^\circ - 125\,^\circ - 110\,^\circ = 55\,^\circ$$

Tontin lävistäjän z määrittämiseen käytetään kosinilausetta. Tällöin

$$z^2 = 88^2 + 120^2 - 2 \cdot 88 \cdot 120 \cos 125\,^\circ \approx 34257,93$$
$$\Rightarrow z = \sqrt{34257,93} \approx 185,089(m)$$

Kulman α suuruuden määrittämiseen käytetään sinilausetta. Tällöin

$$\tfrac{120}{\sin \alpha} = \tfrac{z}{\sin 125\,^\circ}$$
$$\Rightarrow z \sin \alpha = 120 \sin 125\,^\circ$$
$$\Rightarrow \sin \alpha = \tfrac{120 \sin 125\,^\circ}{z}$$
$$\Rightarrow \sin \alpha \approx 0,531$$
$$\Rightarrow \alpha \approx 32,079\,^\circ \text{ tai } \alpha = 180\,^\circ - 32,079\,^\circ \approx 147,921\,^\circ$$

Kulma α on terävä kulma, joten on oltava $\alpha = 32,079\,^\circ$.
Nyt kulman β suuruudeksi saadaan

$$\beta = 70\,^\circ - \alpha = 37,921\,^\circ$$

ja kulman γ suuruudeksi

$$\gamma = 180\,^\circ - \delta - \beta = 87,079\,^\circ.$$

Tontin sivujen pituudet määritetään sinilausetta käyttäen seuraavalla tavalla.

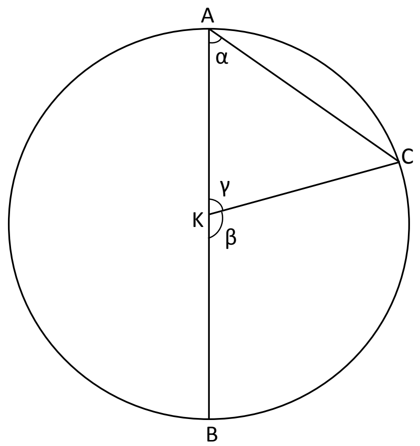
$$\tfrac{x}{\sin \beta} = \tfrac{z}{\sin \delta}$$
$$\Rightarrow x = \sin \beta \cdot \tfrac{z}{\sin \delta}$$
$$\Rightarrow x \approx 138,86 \approx 139(m)$$

$$\tfrac{y}{\sin \gamma} = \tfrac{z}{\sin \delta}$$
$$\Rightarrow y = \sin \gamma \cdot \tfrac{z}{\sin \delta}$$
$$\Rightarrow y \approx 225,658 \approx 226(m)$$

Tutkitun ajanjakson geometrian tehtävissä oli yllättävän vähän todistustehtäviä. Seuraavassa mallitehtävässä pyydetään kuitenkin todistamaan ympyrään liittyvä lause, joka opitaan lukion pitkän matematiikan geometrian kurssilla.

S96/7b, tehtävänanto: Olkoon K ympyrän keskipiste, A ja B ympyrän halkaisijan päätepisteet ja C mielivaltainen kehän piste, joka ei ole A eikä B. Todista, että kehäkulma CAB on puolet keskuskulmasta CKB.

Ratkaisu: Hahmotellaan tilannetta kuvan 28 mukaisella piirroksella, jossa kolmion CKA sivut KA ja KC ovat ympyrän säteitä ja täten kolmio CKA on tasakylkinen.



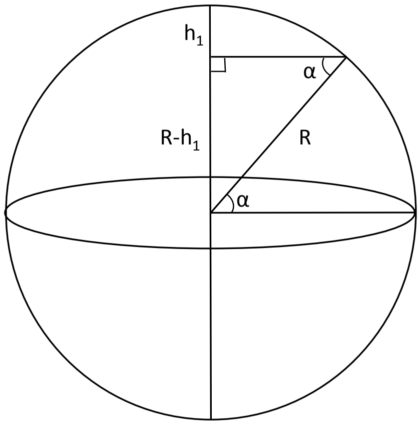
Kuva 28: Ympyrä

Kulman γ suuruudeksi saadaan $\gamma = 180\,^\circ - 2\alpha$ ja vieruskulman β suuruudeksi $\beta = 180\,^\circ - \gamma = 180\,^\circ - (180\,^\circ - 2\alpha) = 2\alpha$ ja edelleen $\alpha = \frac{\beta}{2}$.

Kuten aiemmin todettiin, osassa geometrian tehtävistä vaaditaan myös muiden matematiikan kurssien oppien hallintaa. Seuraavassa, palloon liittyvässä mallitehtävässä kokelaan tulee hallita myös prosenttilaskennan perusteet. Lisäksi tehtävä on oivallinen esimerkki tehtävästä, jossa testataan kokelaan avaruudellista hahmottamiskykyä sekä geometrian kurssin perusasioiden hallintaa.

S01/6, tehtävänanto: Maapallon napa-alueiksi kutsutaan pohjoisen napapiirin pohjoispuolella olevaa aluetta ja eteläisen napapiirin eteläpuolista aluetta. Trooppinen alue on päiväntasaajan kummallakin puolella kääntöpiirien välissä oleva alue. Kuinka monta prosenttia napa-alueet ovat koko maapallon pinta-alasta? Entä kuinka monta prosenttia on trooppinen alue? Napapiirin leveysaste on $66,5\,^\circ$ ja kääntöpiirin $23,5\,^\circ$.

Ratkaisu: Merkitään kuvan 29 mukaisesti maapallon sädettä R ja napaaluekalotin korkeutta h_1. Taulukkokirjasta saadaan kalotin pinta-alaksi $A_K = 2\pi R h_1$.



Kuva 29: Maapallon napa-alueen pinta-ala

Napapiirin leveysaste on $\alpha = 66,5\,°$. Trigonometrian avulla muodostetaan yhtälö

$$\begin{aligned} \tfrac{R-h_1}{R} &= \sin\alpha \\ \Rightarrow h_1 &= R - R\sin\alpha \\ \Rightarrow h_1 &= R(1-\sin\alpha), \end{aligned}$$

jolloin kalotin pinta-alaksi saadaan

$$\begin{aligned} A_K &= 2\pi R(1-\sin\alpha) \\ \Rightarrow A_K &= 2\pi R^2(1-\sin 66,5\,°). \end{aligned}$$

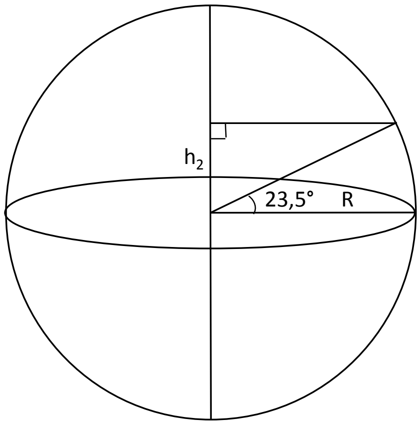
Koko maapallon pinta-ala on $4\pi R^2$ ja napa-alueiden osuus tästä on

$$\begin{aligned} \tfrac{2A_K}{4\pi R^2} &= \tfrac{2\cdot 2\pi R^2(1-sin 66,5\,°)}{4\pi R^2} \\ \Rightarrow \tfrac{2A_K}{4\pi R^2} &= 1-\sin 66,5\,° \\ \Rightarrow \tfrac{2A_K}{4\pi R^2} &= 0,0829 \approx 8,3\%. \end{aligned}$$

Merkitään päiväntasaajan ja pohjoisen kääntöpiirin välisen vyöhykkeen korkeutta kuvan 30 mukaisesti $h_2 = R\sin 23,5\,°$.

Taulukkokirjan mukaan vyöhykkeen pinta-alaksi saadaan

$$A_V = 2\pi R h_2 = 2\pi R^2 \sin 23,5\,°.$$



Kuva 30: Maapallon trooppisen alueen pinta-ala

Täten trooppisen alueen osuudeksi koko maapallon pinta-alasta saadaan

$$\frac{2A_V}{4\pi R^2} = \frac{2 \cdot 2\pi R^2 \sin 23{,}5\,^\circ}{4\pi R^2}$$
$$\Rightarrow \frac{2A_V}{4\pi R^2} = \sin 23,5\,^\circ$$
$$\Rightarrow \frac{2A_V}{4\pi R^2} \approx 0,3987 \approx 39,9\%$$

Seuraava mallitehtävä on kymmenen vuoden tarkastelujakson parhaiten osattu tehtävä. Kyseessä on avaruusgeometrian perustehtävä lieriön tilavuuteen liittyen. Tehtävän keskimääräinen pistemäärä oli 5,4 pistettä ja tehtävään vastasi jopa 98,8 prosenttia kokeeseen osallistuneista opiskelijoista.

K97/1, tehtävänanto: Suoran ympyrälieriön muotoiseen astiaan kaadetaan 5,0 litraa vettä. Tällöin veden korkeus astiassa on 22 cm. Laske pohjan halkaisija.

Ratkaisu: Lieriön tilavuus määritetään yhtälöllä $V = \pi r^2 h$. Ratkaistaan ensiksi pohjan säteen pituus sijoittamalla lähtöarvot lieriön tilavuuden yhtälöön. Tällöin saadaan

$$\pi r^2 \cdot 2,2 = 5,0$$
$$\Rightarrow r^2 = \frac{5{,}0}{2{,}2\pi}$$
$$\Rightarrow r = \sqrt{\frac{5{,}0}{2{,}2\pi}} \approx 0,851(dm)$$

Negatiivinen ratkaisu $-\frac{5{,}0}{2{,}2\pi}$ ei sovi pohjan säteen pituudeksi. Täten pohjan halkaisijan pituus on $2r = 2 \cdot 0,851dm \approx 1,7dm = 17cm$.

Toiseksi viimeinen mallitehtävä perustuu suorakulmaisen särmiön tilavuuden määrittämiseen. Kyseessä on avaruusgeometriaan liittyvä perustehtävä.

K98/6, tehtävänanto: Suorakulmaisen särmiön muotoisessa suljetussa lasisäiliössä on 1,20 l vettä. Vaakasuoralla alustalla mitattuna veden korkeus on 40 mm. Kun säiliö käännetään kyljelleen, on veden korkeus 50 mm, ja kun säiliö käännetään toiselle kyljelleen, on veden korkeus 60 mm. Määritä säiliön tilavuus.

Ratkaisu: Käytetään tehtävän ratkaisussa pituuden yksikkönä desimetriä. Olkoon suorakulmaisen särmiön särmät x, y ja z sitem, että x ja y ovat pohjasärmät. Veden tilavuus on sama eri särmiön ollessa eri asennoissa. Täten saadaan seuraavat yhtälöt:

$$a \cdot b \cdot 0,4 = 1,2$$
$$\Rightarrow b = \tfrac{3}{a}$$

$$a \cdot c \cdot 0,5 = 1,2$$
$$\Rightarrow c = \tfrac{2,4}{a}$$

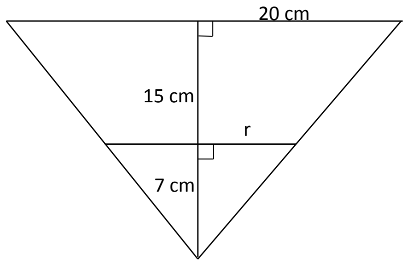
$$b \cdot c \cdot 0,6 = 1,2$$
$$\Rightarrow \tfrac{3}{a} \cdot \tfrac{2,4}{a} \cdot 0,6 = 1,2$$
$$\Rightarrow a^2 = 3,6$$

Tällöin saadaan $a = \sqrt{3,6}$, $b = \frac{3}{\sqrt{3,6}}$ ja $c = \frac{2,4}{\sqrt{3,6}}$.
Särmiön tilavuus on $abc = \sqrt{3,6} \cdot \frac{3}{\sqrt{3,6}} \cdot \frac{2,4}{\sqrt{3,6}} dm^3 = 3,8 dm^3 = 3,8 l$.

Viimeinen mallitehtävä mittaa kokelaan avaruudellista hahmottamiskykyä. Kyseessä on avaruusgeometrian tehtävä, jonka ratkaisussa tarvitaan kuvioiden yhdenmuotoisuuden että tasokuvioiden pinta-alojen määrittämisen hallintaa.

K94/4a, tehtävänanto: Sadevesimittarina käytettiin kärjellään seisovaa ympyräkartiota, jonka korkeus oli 15 cm ja pohjan säde 20 cm. Sateen jälkeen mittarin veden pinta oli 7 cm korkeudella. Kuinka monta millimetriä oli sademäärä?

Ratkaisu: Käytetään kuvan 31 mukaisia merkintöjä.



Kuva 31: Kartio

Yhdenmuosoitisten suorakulmaisten kolmioiden nojalla voidaan kirjoittaa $\frac{r}{20} = \frac{7}{15}$, josta voidaan ratkaista $r = \frac{7}{15} \cdot 20 = \frac{28}{3}$.

Veden tilavuus määritetään yhtälöllä $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, jolloin veden tilavuudeksi saadaan $V = \frac{1}{3}\pi(\frac{28}{3}^2) \cdot 7 \approx 638,6(cm^3)$. Vettä on kertynyt mittariin kartion pohjaympyrän kokoiselta alueelta, jonka suuruus on $A = \pi \cdot 20^2 \approx 1257(cm^2)$. Sataneen veden tilavuus on $V = As$, missä $s(cm)$ on sademäärä. Tällöin $s = \frac{V}{A} = \frac{638,6}{1257} cm \approx 0,5cm = 5mm$.

4.3 Johtopäätöksiä

1980-luvun puolestavälin alkaen lukion pitkän matematiikan geometrian kurssin sisällöt ja opetussuunnitelman perusteissa asetetut tavoitteet ovat pysyneet hyvin pitkälti samoina. Opiskelijalle asetetut tavoitteet ovat painottuneet tasokuvioiden ja avaruuskappaleiden hahmottamiseen. Opetussuunnitelmien keskeisimpiä sisältöjä ovat tasokuvioiden ja avaruuskappaleiden ominaisuuksien lisäksi yhdenmuotoisuus, trigonometria sekä pinta-alojen ja tilavuuksien laskeminen. Tämän voi havaita selvästi myös ylioppilaskokeiden tehtävistä. Ylioppilaskokeiden pitkän matematiikan geometrian kurssiin liittyvät tyypillisimmät tehtävät näyttävät painottuvan opetussuunnitelman perusteiden keskeisimpiin sisältöihin. Tehtävien ratkaisussa kokelaan tulee tuntea tasokuvioiden ja avaruuskappaleiden ominaisuuksia. Lisäksi kuvioiden yhdenmuotoisuuden, Pythagoraan lauseen, trigonometrian sekä pinta-alojen ja tilavuuksien laskemisen hallinta on tehtävien ratkaisussa menestymisen edellytys. Geometrian tehtävät vaikuttavat olevan suosittuja ja melko hyvin osattuja.

Viitteet

[1] Kouluhallitus, Lukion opetussuunnitelman perusteet 1985, Helsinki, 1985.

[2] Opetushallitus, Lukion opetussuunnitelman perusteet 1994, Helsinki, 1994.

[3] Opetushallitus, Lukion opetussuunnitelman perusteet 2003, [Viitattu 7.8.2012]. Saatavilla internetistä: http://www.oph.fi/saadokset_ja_ohjeet/opetussuunnitelmien_ja_tutkintojen_perusteet/lukiokoulutus

[4] Berele, A., Goldman, J., Geometry, Theorems and Constructions, Prentice Hall, Inc., New Jersey, 2001

[5] Lehtinen, M., Merikoski, J., Tossavainen, T., Johdatus tasogeometriaan, WSOY Oppimateriaalit Oy, Helsinki, 2007

[6] Thompson, J. (toim.), Matematiikan käsikirja, 3. painos, Tammi, Helsinki, 1994

[7] Väisälä, K., Geometria, 10. painos, Werner Söderström osakeyhtiö, Porvoo, 1971

[8] Kangasaho, J., Piri, P., Taavitsainen, H., Pitkän matematiikan ylioppilaskokeet 1991-2000, 3. painos, WSOY, Juva, 2000

[9] Kangasaho, J., Piri, P., Taavitsainen, H., Pitkän matematiikan ylioppilaskokeet 2000-2010, 11. painos, WSOY, Helsinki, 2010